Álgebra I (MA – 2221)
Guía de Ejercicios Nº 3

1.- Determinar cuáles de las siguientes correspondencias son operaciones binarias sobre el conjunto indicado:

(a) En $\mathbb{R}$: $a \circ b = \sqrt[3]{a+b}$ (b) En $\mathbb{R}^{+}$: $a * b = |a-b|$

(c) En $\mathbb{N}$: $a \# b = a - b$ (d) En $\mathbb{Z}$: $a * b = a + \frac{b}{3}$

(e) En $\mathbb{Z}^{+}$: $a \circ b = a^{b}$ (f) En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(a,b) * (c,d) = (a^{c}, bc + d)$

2.- Definir dos operaciones binarias diferentes para los conjuntos:

(a) $\mathbb{N}$ (b) $\mathbb{Z}^{+}$ (c) $\mathbb{Q}^{*}$ (d) $\mathbb{R}$ (e) $A = \{a,b,c,d\}$

3.- Definir una correspondencia que no sea operación binaria para cada uno de los conjuntos anteriores.

4.- Para las siguientes operaciones binarias, estudiar la asociatividad, conmutatividad y la existencia de neutro, inversos y elementos cancelables.

(a) En $\mathbb{Z}$: $a * b = a - b$ (b) En $\mathbb{Q}$: $a * b = ab + 1$

(c) En$\mathbb{Z}^{+}$: $a * b = 2^{ab}$ (d) En $\mathbb{Q}$: $a * b = \frac{ab}{2}$

(e) En $\mathbb{Z}^{+}$: $a \circ b = a^{b}$ (f) En $\mathbb{Z}$: $a * b = 2(a+b)$

(g) En $\mathbb{R}$: $a \circ b = 0$ (h) En $\mathbb{Z}$: $a * b = a + b + 4$

(i) En $\mathbb{R}$: $a \circ b = a + b^{2}$ (j) En $\mathbb{Q}$: $a * b = a + \frac{1}{b}$

(l) En $\mathbb{R}^{*}$: $a \circ b = a|b|$ (m) En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{*}$: $(a,b) * (c,d) = (a + c + 2, bd)$

5.- En $A = \{a,b,c,d,e\}$ se define la operación binaria $*$ por la siguiente tabla:

$*$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

(a) Calcular $b * d$, $c * c$ y $\big((a * c) * e\big) * a$.

(b) Calcular $(a * b) * c$ y $a * (b * c)$. ¿Se puede asegurar que $*$ es asociativa?

(c) ¿Es $*$ conmutativa? ¿Existe elemento neutro?

6.- En $\mathbb{N}$ se definen las operaciones binarias $*$ y $\circ$. Determinar si $*$ es distributiva respecto a $\circ$

(a) $a * b = a^{b}$ y $a \circ b = a + b$ (b) $a * b = a^{b}$ y $a \circ b = ab$

(b) $a * b = a$ y $a \circ b = a + b$

Prof. María Teresa Varela

7.- Para las siguientes operaciones binarias, estudiar sus propiedades y elementos distinguidos:

$*$	0	1
0	0	0
1	0	1

$*$	0	1
0	0	1
1	1	0

$*$	1	2	3
1	3	1	2
2	2	3	1
3	2	1	3

8.- Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ fijos, y sea $*$ la operación binaria definida en $\mathbb{Z}$ por $x * y = ax + by$. Determinar, en cada caso, condiciones sobre a y b para que la operación $*$ satisfaga las propiedades siguientes:

(a) Asociatividad
(b) Conmutatividad
(c) Asociatividad y conmutatividad
(d) Exista neutro
(e) Asociatividad, conmutatividad y exista neutro

9.- Sea $*$ una operación binaria sobre un conjunto A con elemento neutro e. Probar que $*$ es asociativa y conmutativa si y solo si para todos $a, b, c, d \in A$ se verifica que:

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

10.- Determinar si las siguientes estructuras son semigrupos:

(a) $(\mathbb{Z}, *)$ donde $a * b = a + b + ab$
(b) $(\mathbb{Z}, *)$ donde $a * b = a + 1$
(a) $(\mathbb{Z}, *)$ donde $a * b = a^2 - b^2$

11.- Determinar si las siguientes estructuras son monoides:

(a) $(\mathbb{N}, *)$ donde $a * b = ab$
(b) $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ donde $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
(a) $(\mathbb{R}^{2\times 2}, *)$ donde $A * B = A - 2AB$ ($\mathbb{R}^{2\times 2}$: matrices 2x2 con entradas reales)

12.- Considerar los monoides $(M, \circ)$ y $(S, *)$ donde $M = \{e, a, b, c\}$ y $S = \{x, y\}$. Se conoce la tabla de la operación $\circ$ y se sabe que existe un homomorfismo $f: M \to S$, donde:

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c

$f(e) = x$
$f(a) = x$
$f(b) = y$
$f(c) = y$

Hallar la tabla de la operación $*$.

Prof. María Teresa Varela